

DS3

Conseils pour aborder le devoir

- La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- Pensez à vérifier l'homogénéité de vos relations

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Durée de l'épreuve : 4h

I - Lac de Joux

Ce sujet Banque PT s'intéressait au lac de Joux. Ici, la partie sur la mesure de température et de profondeur.

A - Mesure de la température du lac

En été, la température du lac fluctue entre 18°C et 24°C (soit entre 291 K et 297 K).

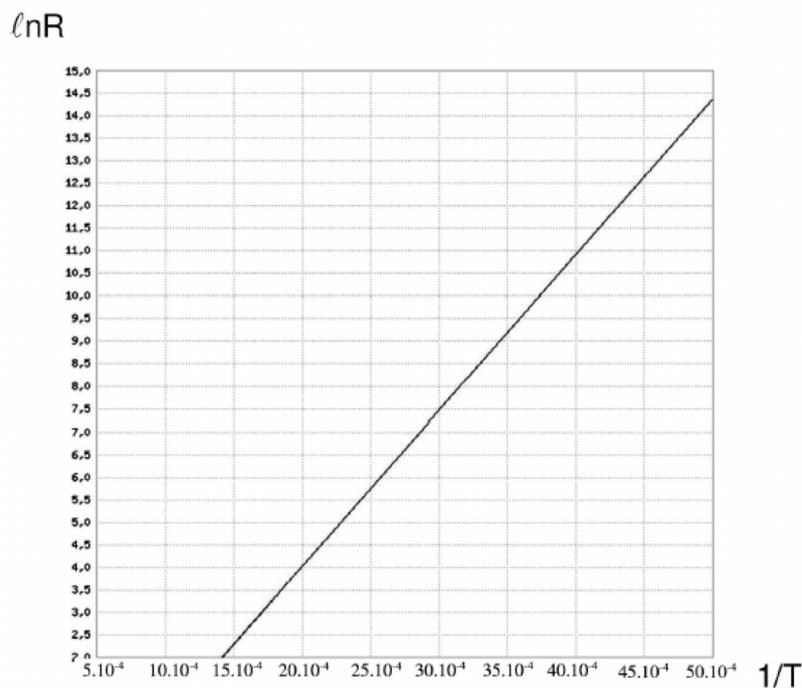
Pour la mesurer, on se propose d'utiliser une thermistance : il s'agit d'un composant ohmique dont la résistance dépend de la température selon la loi :

$$R(T) = R_0 e^{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

où T est la température absolue en K et $T_0 = 294$ K,
et où R_0 et B sont des constantes positives.

1. Tracer l'allure de la courbe $R(T)$.

Des mesures expérimentales ont permis de tracer ci-dessous en échelle semi-logarithmique, la courbe $\ln(R)$ en fonction de $1/T$.

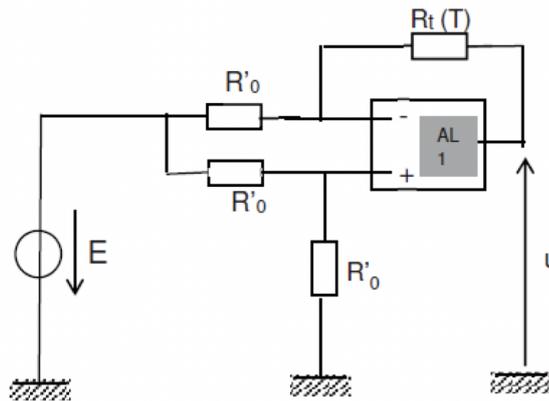


2. Expliquer en quoi ce graphe permet de valider la loi $R(T)$ et de déterminer B et R_0 .
On détermine ainsi : $B = 3500$ K et $R_0 = 8000 \Omega$
3. On définit la sensibilité s (appelée aussi coefficient de température) de la thermistance par :

$$s = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}$$

Déterminer, pour une température T voisine de T_0 , l'expression de s en fonction de B et T_0 .

4. L'expression précédente conduit à la valeur $s = -0,04 \text{ K}^{-1}$. Serait-il préférable d'utiliser une résistance métallique dont le coefficient de température est typiquement de l'ordre de $0,5 \text{ \% K}^{-1}$?
5. En ajoutant en parallèle avec la thermistance, un résistor convenablement choisi, on obtient une résistance totale R_t qui varie de façon quasi-affine avec la température autour de la valeur T_0 , selon la loi : $R_t(T) = R'_0(1 + \alpha(T - T_0))$ avec $R'_0 = 5000 \Omega$ et $\alpha = -2 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$. Quel inconvénient la linéarisation ainsi effectuée présente-t-elle ?
6. On souhaite obtenir une tension proportionnelle à la température. Pour cela, la résistance R_t est insérée dans le montage suivant :



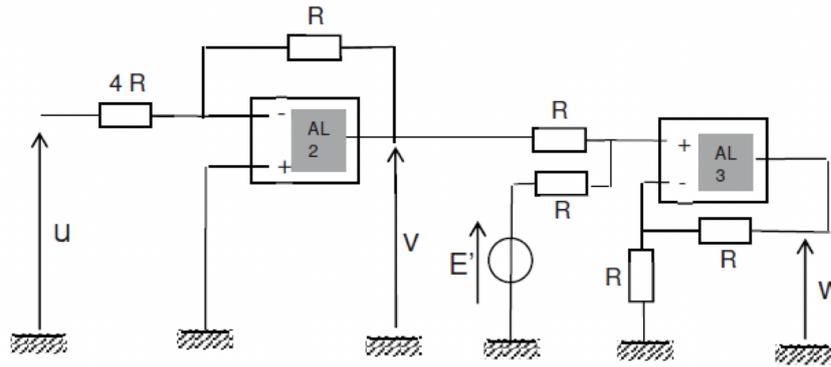
Le montage comprend un générateur idéal de tension continue de force électromotrice $E = 400 \text{ V}$ et un A.L.I. (AL1) dont l'alimentation ($+15 \text{ V}$, -15 V) n'est pas représentée. La tension de saturation est $U_{sat} = 15 \text{ V}$.

Quels sont les ordres de grandeur des intensités i_+ et i_- des courants électriques d'entrée et du gain statique d'un A.L.I. ?

Que deviennent ces grandeurs dans le modèle de l'A.L.I. idéal ?

Dans toute la suite, les A.L.I. seront supposés idéaux.

7. Pourquoi peut-on envisager un fonctionnement en régime linéaire ? Que vaut alors la tension d'entrée ($V_+ - V_-$) de l'A.L.I. ?
8. Déterminer la tension de sortie u du montage en fonction de E , et de la différence $(T - T_0)$.
9. Vérifier que pour la plage de température considérée, l'hypothèse du régime linéaire est validée.
10. La tension u précédente est placée à l'entrée du montage suivant dans lequel AL2 et AL3 sont des A.L.I. idéaux, identiques à AL1 et alimentés de la même façon. On donne $R = 1 \text{ k}\Omega$.



Exprimer v en fonction de u , puis w en fonction de v et E' .

11. Montrer que pour une valeur bien choisie de E' que l'on précisera, la tension w correspond exactement à la température θ exprimée en °Celsius. (On rappelle $\theta(^{\circ}C) = T(K) - 273$).

B - Mesure de la profondeur du lac

La pression et la profondeur sont liées. Pour mesurer la profondeur, on va donc utiliser un capteur de pression : le capteur inductif de pression est formé par une bobine à l'intérieur de laquelle on introduit un barreau ferromagnétique. Cette introduction fait varier son inductance propre.

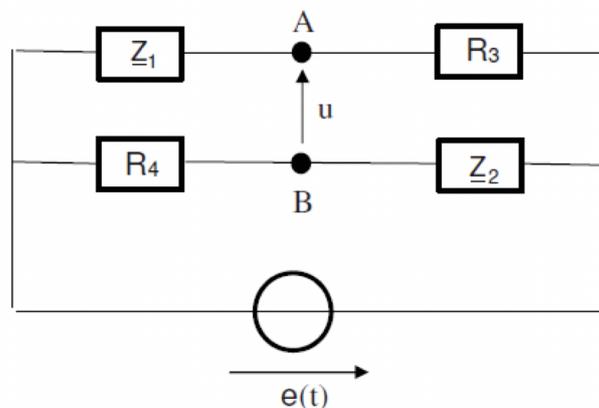
Le barreau pénètre plus ou moins dans la bobine sous l'effet d'une augmentation de la pression P par rapport à la pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar et on admet que l'inductance devient alors $L_1 = L_0 \left(1 + \beta \frac{P - P_0}{P_0}\right)$ avec $\beta = 0,1$ et $L_0 = 25$ mH l'inductance de la bobine sans barreau ferromagnétique.

Pour mesurer la valeur de L_1 , on utilise le circuit suivant alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω , et étudié en régime permanent.

La bobine est modélisée par l'association série d'une inductance L_1 et d'une résistance interne R_1 ; on notera \underline{Z}_1 son impédance complexe.

Dans ce circuit, \underline{Z}_2 est l'impédance correspondant à l'association parallèle d'un condensateur de capacité C_2 réglable et d'un résistor de résistance R_2 réglable.

R_3 et R_4 sont deux résistors de résistances fixes.



12. Exprimer les impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 .

13. La mesure consiste à régler R_2 et C_2 de façon à ce que la tension u entre les points A et B soit nulle. Montrer qu'on a la relation : $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_3 \cdot R_4$.
14. En déduire les expressions de R_1 et L_1 en fonction de R_2 , R_3 , R_4 et C_2 .
15. On fixe $R_3 = 100 \Omega$ et $R_4 = 10 \Omega$, et on mesure $R_2 = 100 \Omega$ et $C_2 = 32,5 \mu\text{F}$.
Calculer R_1 et L_1 , puis vérifier que cette dernière valeur est compatible avec la valeur de la pression $P = 4 \text{ bar}$ attendue.

II - Conditionnement des signaux par oscillateur

Ce sujet Banque PT s'intéressait à un capteur capacitif de déplacement. Ici, la partie sur le conditionnement des signaux par oscillateur.

On considère le montage électronique ci-après.

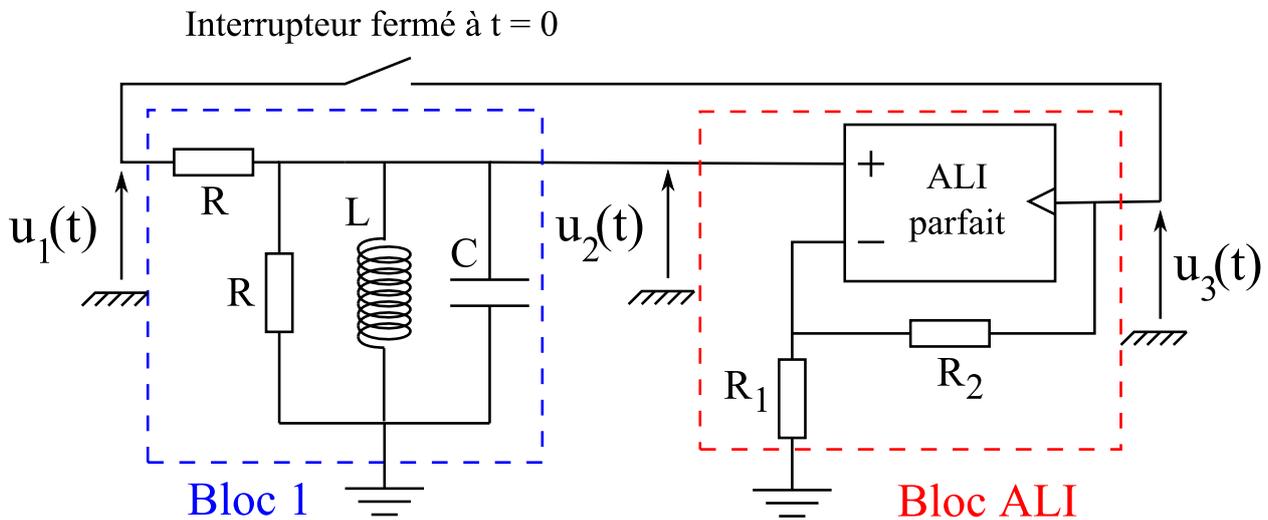


Fig. 10 : Montage envisagé pour extraire l'information issue d'un capteur. L'ALI utilisé, que l'on supposera parfait, est alimenté au moyen d'une alimentation symétrique $\pm V_{CC} = \pm 12 \text{ V}$ et sa tension de saturation est $V_{SAT} = 11 \text{ V}$.

Étude du bloc 1

Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec $A_0 = 0, 1$, $Q = 25$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\log(25) \approx 1, 4$.

16. Donner les équations des deux asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.
17. Représenter le diagramme de Bode (en amplitude uniquement) donnant ce gain en décibels en fonction de $\log(x)$.
18. Préciser la nature de ce filtre.
19. Exprimer, à partir du schéma du bloc 1, la fonction de transfert \underline{H} en fonction de ω et des valeurs caractéristiques des composants de ce bloc 1. Par identification, donner les expressions littérales de ω_0 et Q en fonction des valeurs caractéristiques des composants.

Étude du bloc ALI

20. Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe $\underline{G} = \frac{u_3}{u_2}$.

21. On pose $K = |\underline{G}|$. Exprimer K en fonction de R_1 et R_2 .

Système bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

22. Dédire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par u_3 .

23. À partir de cette équation :

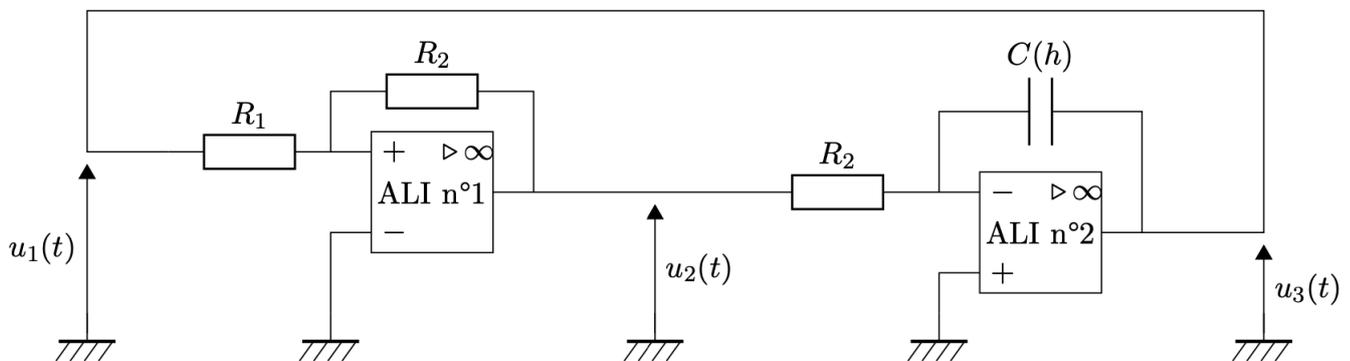
(a) Trouver une condition liant A_0 , K et Q pour que s'établissent des oscillations quasi sinusoïdales.

(b) Déterminer alors la fréquence f_0 de ces oscillations.

24. Toujours à partir de l'équation différentielle de u_3 , montrer que la naissance d'oscillations impose des conditions sur le produit $A_0 K$ et les expliciter.

III - Mesure de capacité

Dans ce sujet, on s'intéresse à un capteur de niveau capacitif : la capacité d'un condensateur dépend de la hauteur de liquide qu'on note h . Pour mesurer la capacité électrique $C(h)$ du capteur, ce dernier est inséré dans le multivibrateur astable présenté ci-après qui est constitué de deux amplificateurs linéaires intégrés (ALI). Nous allons montrer que la période des tensions électriques dans ce montage est proportionnelle à la capacité du capteur.



On suppose que les deux ALI de ce montage sont idéaux et alimentés par une tension continue. On note V_{sat} leur tension de saturation.

25. Rappeler les valeurs des courants de polarisation, de l'impédance d'entrée, de l'impédance de sortie, et du gain statique pour un ALI idéal.

On étudie tout d'abord la première partie du montage, comprise entre les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur la figure.

26. Justifier que l'ALI n°1 fonctionne en régime saturé.

27. Exprimer le potentiel de l'entrée non-inverseuse de l'ALI n°1 en fonction de R_1 , R_2 , $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

28. En supposant que $u_2(t) = +V_{sat}$, déterminer la tension seuil U_1^- correspondant au basculement de l'ALI n°1.

- 29.** En supposant que $u_2(t) = -V_{sat}$, déterminer la tension seuil U_1^+ correspondant au basculement de l'ALI n°1

On étudie maintenant la seconde partie du montage, comprise entre les tensions $u_2(t)$ et $u_3(t)$ sur la figure.

- 30.** Justifier que l'ALI n°2 fonctionne en régime linéaire.
31. Montrer que la tension $u_2(t)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$u_2(t) = -k \frac{du_3}{dt}$$

avec k une constante positive que l'on exprimera en fonction des composants du montage.

On étudie enfin le montage dans son ensemble. On suppose que le potentiel en sortie de l'ALI n°1 bascule à $+V_{sat}$ à l'instant $t = 0$, les tensions vérifient donc : $u_2(t = 0^+) = +V_{sat}$ et $u_3(t = 0^+) = U_1^+$.

- 32.** Déterminer l'expression de la tension $u_3(t)$, tant que l'ALI n°1 n'a pas basculé, en fonction du temps t , de la tension de saturation V_{sat} et des composants du montage.
33. Exprimer l'instant t_1 , où le potentiel en sortie de l'ALI n°1 bascule à $-V_{sat}$, en fonction des composants du montage.
34. Déterminer l'expression de la tension $u_3(t)$, après le basculement de l'ALI n°1, en fonction du temps t , de la tension de saturation V_{sat} et des composants du montage.
35. Exprimer l'instant t_2 , où le potentiel en sortie de l'ALI n°1 bascule à nouveau à $+V_{sat}$, en fonction des composants du montage.
36. Représenter graphiquement l'évolution des tensions $u_2(t)$ et $u_3(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = t_2$.
37. Exprimer la période T des oscillations de ces tensions en fonction des composants du montage.

IV - Capture d'empreintes digitales

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 1 décrit le schéma de principe de ce dispositif.

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre (\mathcal{D}) et d'une lentille convergente (\mathcal{L}) (figure 2). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre (\mathcal{D}) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille (\mathcal{L}) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A'_1$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A'_1}, \quad D = \overline{A A'_1}, \quad p = \overline{O A_1}, \quad p' = \overline{O A'_1}.$$

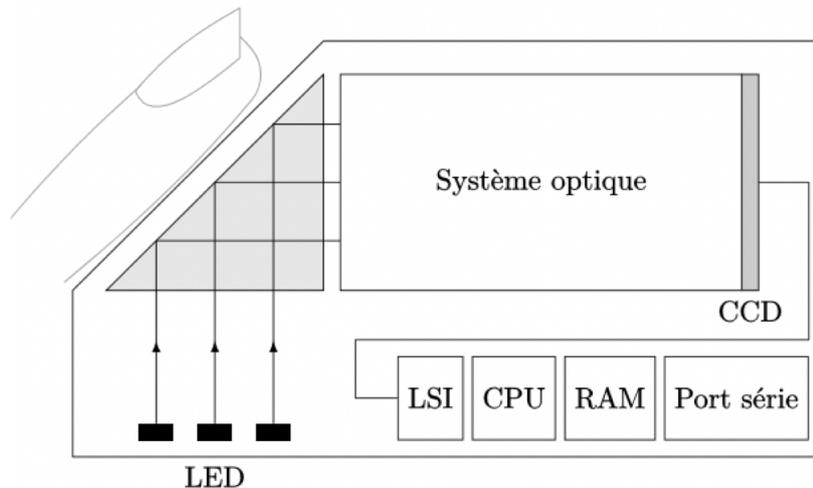


FIGURE 1 – Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

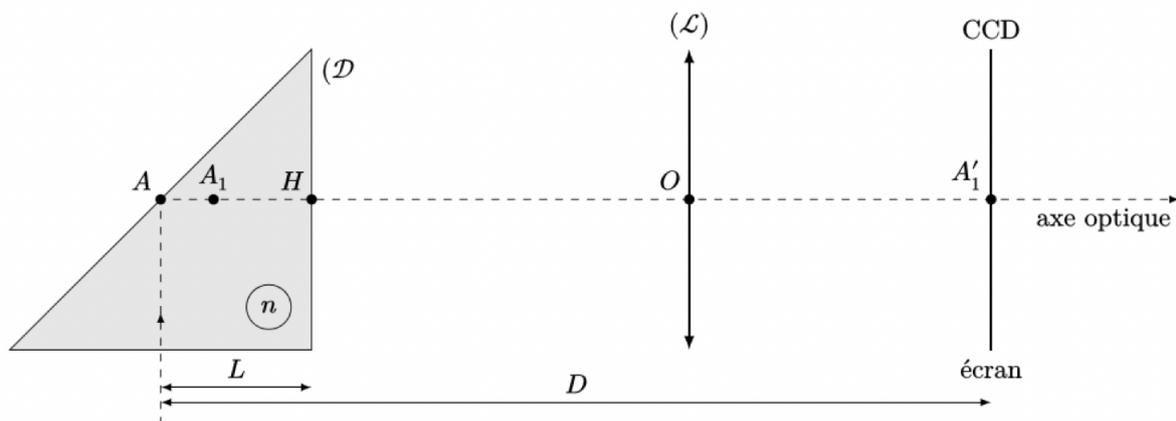


FIGURE 2 – Schéma optique

A - Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . À cet effet, on donne $n = 1,5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = p'/p$ du système optique.

38. Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit $\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}$.
39. Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ . Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.
40. On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport D_1/f' est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par f' .
41. On suppose $\gamma = -2$. À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?

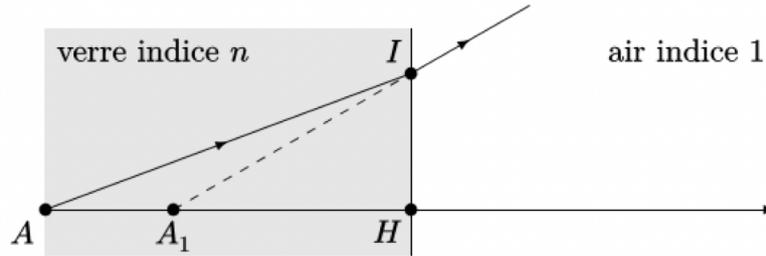


FIGURE 3

42. On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ($|\gamma|$ maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1 . Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on?

B - Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en A_1 au lieu de A .

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 30 \mu\text{m}$ et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100 \mu\text{m}$. On note l_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1 , à l'écran CCD (figure 4)

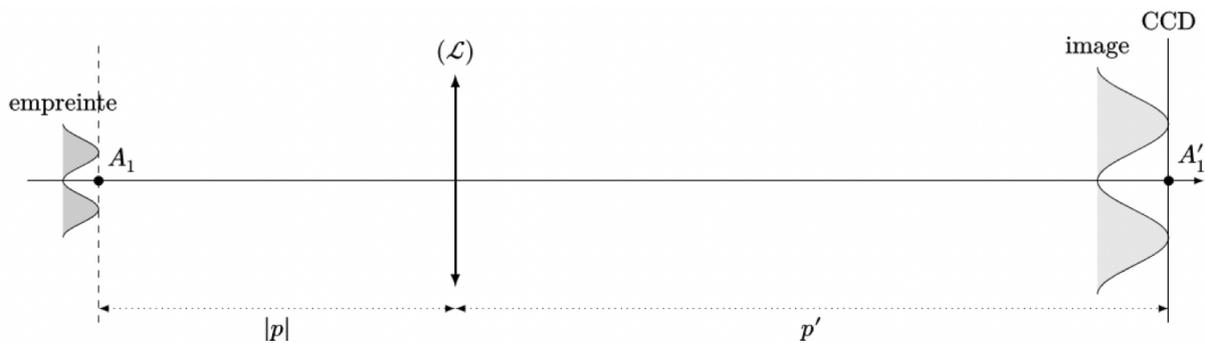


FIGURE 4

Sur la figure 5 les points M_1 , M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M'_1 , M'_2 et M'_3 détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M'_2 ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ .

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$ avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3 . On note alors $\gamma = p'/p$ le grandissement entre les couples de points conjugués (M_1, M'_1) et (M_3, M'_3) . On a $\gamma = -2$.

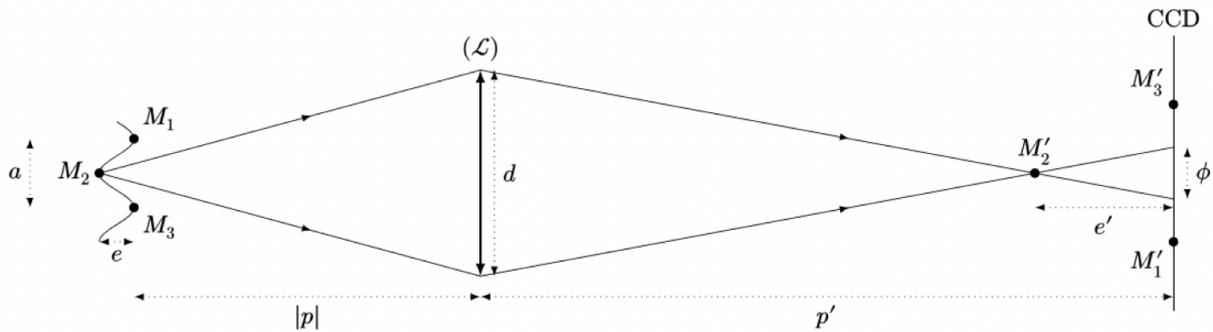


FIGURE 5 – Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

43. À quelle condition sur a et sur l_c peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommandez-vous ?
44. On note d le diamètre de la monture de la lentille (\mathcal{L}). Montrer que $\phi = \gamma d \frac{e}{p}$, dans l'approximation $e \ll |p|$.
En notant e' la distance de M'_2 à la surface du capteur CCD, on pourra montrer $e' \approx \gamma^2 e$.
45. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tache excède la distance $M'_1 M'_3$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

C - Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

46. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.
47. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.
48. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1,5$.