DS4 - 30/11/24

Biométrie de l'œil par interférométrie à cohérence spatiale

Conseils pour aborder le devoir

- La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- Pensez à vérifier l'homogénéité de vos relations
- Pensez à souhaiter un bon anniversaire à Louis !

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES
Durée de l'épreuve : 2h30

I - Obtention d'interférences

A - Longueur de cohérence temporelle d'une source lumineuse

1. Décrire le modèle des trains d'onde en précisant, sur un schéma, la période de l'onde et le temps de cohérence (c'est-à-dire la durée moyenne) du train d'onde.

2. Donner l'ordre de grandeur du temps de cohérence d'un LASER.

3. Calculer le temps de cohérence pour une source de largeur spectrale $\Delta\lambda = 50$ nm et de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 820$ nm.

4. La longueur de cohérence temporelle dans le vide (L_c) d'une source est la longueur occupée dans l'espace par un train d'onde se propageant dans le vide. Déterminer littéralement puis numériquement L_c pour la source précédente.

5. Quelle serait la longueur de cohérence temporelle d'une source parfaitement monochromatique ?

B - Interférences de 2 ondes

On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2, cohérentes, en phase, émettant de manière isotrope une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 et d'intensité I_1 et I_2. On étudie les interférences éventuelles en un point P d'un milieu homogène d'indice de réfraction n, à la distance d_1 de S_1 et d_2 de S_2.

6. Définir la différence de chemin optique δ en P entre l'onde issue de S_2 et celle issue de S_1, en fonction de d_1, d_2 et de l'indice n du milieu.

7. Etablir la formule de Fresnel donnant l'intensité lumineuse $I(P)$ en P, en fonction de I_1, I_2, δ et λ_0.

8. Dans le cas où $I_1 = I_2 = I_0$, l'intensité a pour expression (notée « relation c » dans toute la suite) :

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos(\Phi))$$

Expliciter Φ en fonction de δ et des données.

II - Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air et éclairé par une source S, ponctuelle, monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0. Un écran E_{cr} est placé au foyer image d'une lentille convergente.
La figure 1 donne le schéma de principe de cet interféromètre pour lequel on supposera la séparatrice S_p idéale (infiniment mince, division d'amplitude à 50 % et n'introduisant aucun déphasage). Le miroir $\mathcal{M}'$ est fixe ; $\mathcal{M}$ est mobile.

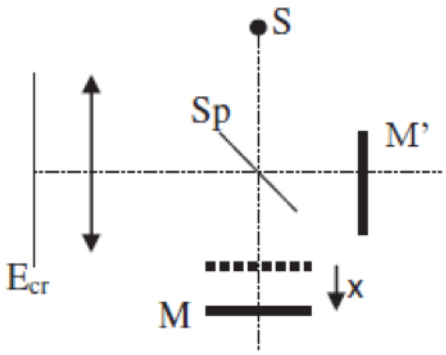


Figure 1

On note « onde 1 » l'onde issue de S se réfléchissant sur $\mathcal{M}'$ et « onde 2 » celle se dirigeant vers $\mathcal{M}$. La différence algébrique de chemin optique entre l'onde 2 et l'onde 1, évaluée en un point P de l'écran E_{cr}, est notée δ.

A l'état initial, les deux miroirs sont équidistants de S_p. On déplace alors $\mathcal{M}$ d'une distance algébrique x ($x > 0$ pour un éloignement de $\mathcal{M}$) : l'interféromètre est réglé en « lame d'air ».

9. A partir d'un schéma clair (à tracer sur la copie), montrer que la différence de chemin optique dans cette situation est : $\delta = 2.n_a.x.\cos(i)$. Que représente i ? Que représente n_a ?

10. Qu'observe-t-on sur l'écran (aucun calcul n'est demandé, on attend juste une description de l'écran) ?

11. On diminue alors x en déplaçant $\mathcal{M}$ de manière à obtenir, sur l'écran, une intensité lumineuse $I(P)$ uniforme (teinte plate). Expliquer en 5 lignes maximum quelle est la manipulation à effectuer et ce que l'on voit sur l'écran au fur et à mesure de ce réglage.

III - Mesure de position

On revient au réglage de l'interféromètre en lame d'air et en teinte plate ($\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ équidistants de S_p, chacun à la distance d_0).

On modifie la source : la source S, ponctuelle, monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0, est à présent au foyer principal objet d'une lentille convergente $\mathcal{L}_0$ (figure 2).
Un détecteur est placé au foyer principal image (noté O) d'une lentille convergente $\mathcal{L}$. Ce détecteur enregistre l'intensité lumineuse au point O $I(O)$ au fur et à mesure du déplacement x du miroir $\mathcal{M}$.
A partir de l'état initial ($\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ équidistants de d_0 de S_p), on translate $\mathcal{M}'$ d'une distance inconnue x_1.

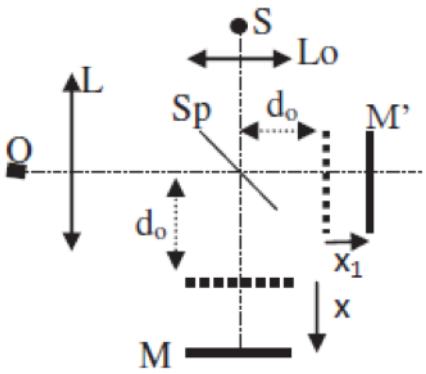


Figure 2

On examine ici la possibilité de repérer la position x_1 du miroir $\mathcal{M}'$ en mesurant le déplacement x du miroir $\mathcal{M}$ à l'aide de la courbe enregistrée $I(O) = f(x)$.
Les notations (1) et (2) des faisceaux et de la différence de chemin optique sont les mêmes qu'en B.

12. Reproduire la figure 2 et tracer la marche des faisceaux 1 et 2 qui se recombinent au point O.

13. Expliciter alors la différence de chemin optique δ en O en fonction de x, x_1 et des données optiques.

14. On note p l'ordre d'interférence ; rappeler la définition de p.

15. On note x_0 le déplacement de $\mathcal{M}$ générant un état interférentiel d'ordre 0. Expliquer pourquoi la détection de l'ordre 0 permettrait de mesurer x_1 à partir de la mesure de x_0.

A - Cas où la source est parfaitement monochromatique

16. À partir de la « relation c », donner l'expression de $I(O)$ en fonction de x, x_1 et des données optiques.

17. On suppose que l'intensité est maximale lorsque $x = 0$. Déterminer les positions x de $\mathcal{M}$ générant des maximas d'intensité.

18. Représenter graphiquement $I(O)$ en fonction de x.

19. Est-il possible de repérer l'état d'interférence d'ordre 0 sur la courbe $I(O)$ lorsque la source est parfaitement monochromatique

B - La source est à faible cohérence temporelle

Dans une première approche, on considère que :

- ▷ Pour observer des interférences entre 2 ondes issues d'une même source, il faut $|\delta| < L_c$
- ▷ Dans le domaine où $|\delta| < L_c$, l'intensité lumineuse résultant des interférences en O est donnée par la « relation c » ;
- ▷ Si $|\delta| > L_c$, il n'y a plus d'interférence et l'intensité conserve la valeur $2I_0$ constante indépendante de δ.
- ▷ Pour les applications numériques : $\lambda_0 = 800$ nm ; $n_a = 1,00$; $L_c = 1,80\,\mu$m.

20. Pour l'état d'interférence d'ordre 0 : quelle est la position théorique (x_0) de $\mathcal{M}$? Pourquoi l'intensité de cette frange est-elle maximale ?

21. Déterminer littéralement les valeurs minimale (x_-) et maximale (x_+) de x entre lesquelles il y a interférences.

22. Déterminer littéralement puis numériquement le nombre de maxima d'intensité détectable.

23. Faire une représentation graphique de l'intensité $I(O)$ en fonction de x, pour $x \in \left[x_- - \dfrac{L_c}{n_a}, x_+ + \dfrac{L_c}{n_a}\right]$.

24. Expérimentalement, on détecte l'état d'interférence d'ordre 0 par un maximum d'intensité correspondant à un déplacement x_0 de $\mathcal{M}$ (voir 20). Expliquer pourquoi la courbe $I(O) = f(x)$ ne permet pas de trouver exactement x_0 mais seulement un encadrement de x_0.

25. Justifier alors que le meilleur estimateur de x_0 est le milieu de l'intervalle $[x_-, x_+]$ (déterminé en 21) avec une incertitude $\Delta x_0 = \dfrac{L_c}{2n_a}$.

Une étude plus détaillée conduit à l'expression $I(O) = 2I0(1+V(x).cos(\Phi))$ différente de la « relation c ».
Le terme $V(x)$ est lié au profil spectral de la source.
La figure 3a donne l'allure d'un enregistrement de $I(O)$ en fonction de x. On conditionne le signal $I(O)$ en supprimant sa composante continue et en détectant son enveloppe positive. On obtient le signal utile I_u (figure 3b).

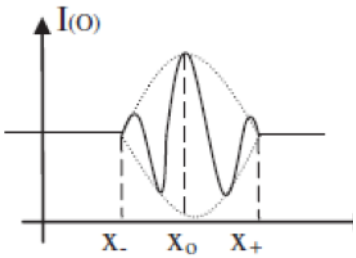


Figure 3.a - sur cette figure, on observe 3 maximas

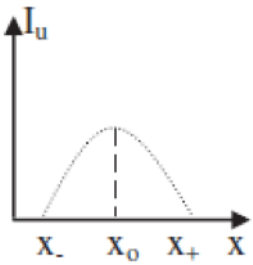


Figure 3.b

IV - Application à la biométrie de l'œil

Pour mesurer les épaisseurs intéressantes de l'œil, on utilise un biomètre. En ophtalmologie, les biomètres dérivent de l'interféromètre de Michelson en remplaçant le miroir $\mathcal{M}'$ par l'œil à mesurer (figure 4), chaque interface biologique jouant successivement le rôle de $\mathcal{M}'$.

Le faisceau 1 arrivant sur l'œil est partiellement réfléchi par la première interface (en A sur la figure 4), la partie transmise se réfléchissant partiellement sur l'interface suivante (en B) et ainsi de suite.
Les faisceaux sont assez fins pour que l'on puisse considérer les interfaces comme planes ; la réflexion sur une interface sera assimilée à celle qui aurait lieu sur un miroir plan $\mathcal{M}'$ de même position.
Le détecteur en O fournit, après détection d'enveloppe, le signal utile I_u de la figure 5, au fur et à mesure du déplacement x du miroir $\mathcal{M}$.
Le pic de référence ($x = x_A = 0$) correspond au signal issu de la réflexion en A ; le pic en x_B correspond au signal issu de la réflexion en B.
On note : D_c la distance AB ; n_c l'indice de réfraction du milieu biologique compris entre A et B.
Données : λ_0, n_a, L_c, n_c.

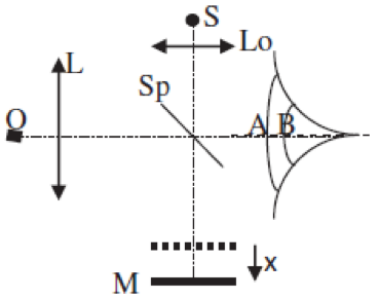


Figure 4

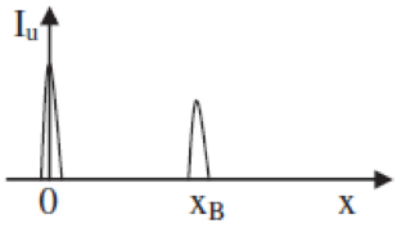


Figure 5

26. Expliciter la différence de chemin optique en O ($\delta_{B,2}$) entre le faisceau 1 se réfléchissant en B et le faisceau 2, en fonction de x, D_c et des données.

27. A partir des résultats des questions 20 à 25, déterminer la valeur théorique de x_B.

28. En déduire l'expression littérale de D_c.

V - Enregistrement

Lors d'un examen ophtalmologique, le miroir $\mathcal{M}$ est translaté sur une distance suffisamment grande pour recueillir des informations sur les différentes structures de l'œil selon le principe décrit dans les questions précédentes.
Certains pics (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6), repérés automatiquement par le logiciel de traitement du signal, correspondent chacun à une interface biologique, le pic P_1 représente l'interface air-cornée (voir documents). L'axe horizontal est proportionnel au déplacement du miroir $\mathcal{M}$, l'axe vertical représente la réponse du détecteur.

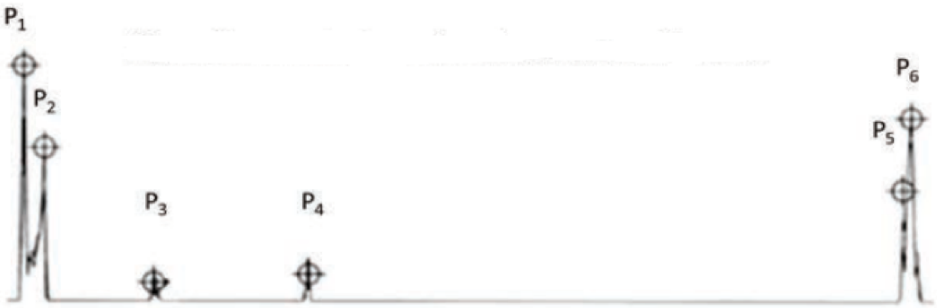
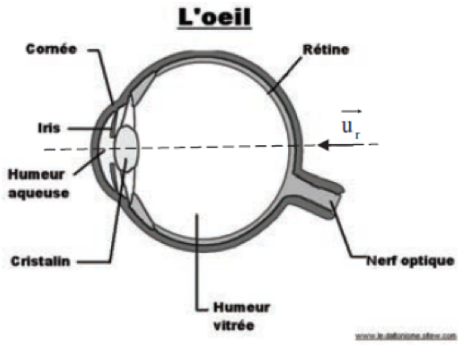


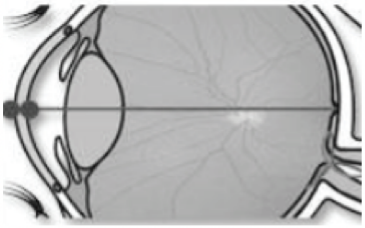
Figure 6 - exemple de courbe obtenue avec un biomètre

Document - L'œil

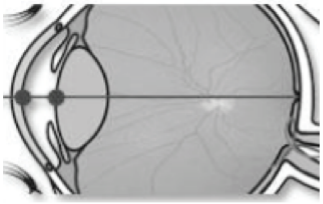


Indice de réfraction des structures transparentes de l'œil :

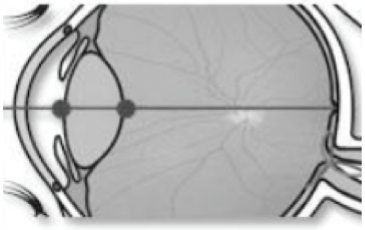
- ▷ indice de la cornée : $n_c = 1,376$
- ▷ Indice de l'humeur aqueuse : $n_{aq} = 1,345$
- ▷ Indice du cristallin théorique : $n_{ct} = 1,406$ (au centre)
- ▷ Indice de l'humeur vitrée : $n_v = 1,344$



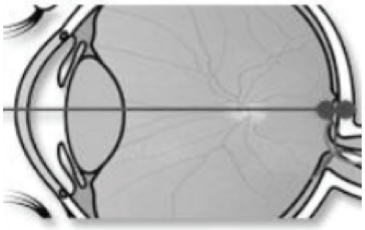
Epaisseur centrale de la cornée : CCT
Ordre de grandeur : 300 à 800 µm



Profondeur de la chambre antérieure contenant l'humeur aqueuse : AD
Ordre de grandeur : 2 à 6 mm



Epaisseur du cristallin : LT



Epaisseur de la rétine : RT
Ordre de grandeur : 200 µm

29. Indiquer quel élément du globe oculaire se situe entre les pics P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6.

30. L'épaisseur de l'humeur vitrée de l'œil étudié est D_v ($D_v = 16,14$ mm). En déduire l'épaisseur LT, en expliquant clairement la méthode utilisée.

VI - Electro-oculographie

Pour bien viser sur l'œil, on peut utiliser l'électro-oculographie qui permet de suivre les mouvements de l'œil.
On ne s'intéressera pas ici au phénomène qui permet d'acquérir les signaux qui reflètent les mouvements de l'œil, mais au traitement de ces signaux.

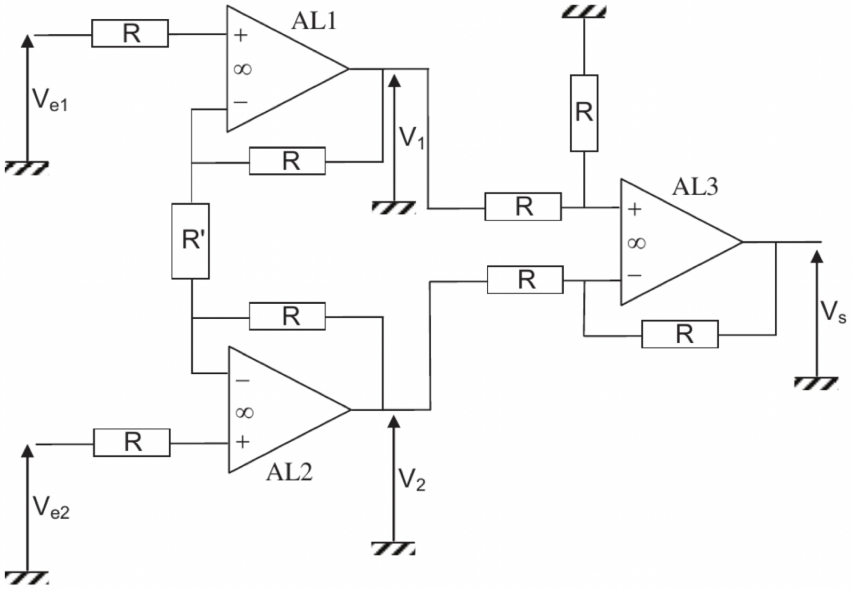
A - Amplificateur de différence

On donne $R = 100\,k\Omega$ et $R' = 2\,k\Omega$.

31. Rappeler les ordres de grandeur du gain statique, de l'impédance d'entrée et de l'impédance de sortie d'un ALI réel.

32. Quelles sont ces valeurs pour un ALI idéal ?

Dans la suite, tous les ALI seront supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire



33. Déterminer $V_2 - V_1$ en fonction de $V_{e1} - V_{e2}$, R et R'.

34. En déduire la tension de sortie V_S en fonction de $V_{e1} - V_{e2}$.

35. Le gain A_d de l'amplificateur est donné par $A_d = \left|\dfrac{V_S}{V_{e1} - V_{e2}}\right|$. Expliciter A_d littéralement puis numériquement.

B - Acquisition du signal

On souhaite enregistrer le mouvement oculaire par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition pendant 1 min.

36. Rappeler la condition de Nyquist-Shannon.

37. Préciser la fréquence d'échantillonnage limite pour l'enregistrement des signaux oculaires ainsi que le nombre de points enregistrés pour une acquisition à cette fréquence limite.

38. Sur l'enregistrement de la figure 7, on visualise le mouvement de l'œil (courbe 2) d'un patient ayant pour consigne de suivre une cible lumineuse qui se déplace (courbe 1). Estimer le retard de l'œil par rapport à la cible.

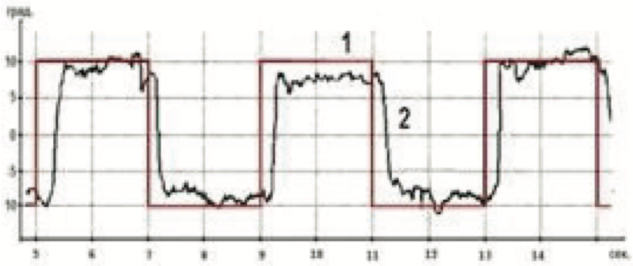


Figure 7 - exemple d'électro-oculogramme
courbe 1 : déplacement de la cible,
courbe 2 : mouvement oculaire.
Echelle horizontale : 1s/div
Echelle verticale 5°/div

DS4 - 30/11/24

Chimie

Conseils pour aborder le devoir

- La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- Pensez à vérifier l'homogénéité de vos relations
- Pensez à souhaiter un bon anniversaire à Louis !

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES
Durée de l'épreuve : 1h30

I - Thermodynamique de la synthèse de l'alcool

Aujourd'hui, c'est l'anniversaire de Louis. La générosité étant sa première qualité, ce dernier a apporté une bouteille de vodka de son propre cru pour fêter ses 20 ans avec les personnes qui lui sont les plus chères, vous.

L'éthanol est un alcool pouvant être obtenu par fermentation, ce n'est donc qu'assez tardivement qu'on l'obtint par synthèse.
La première synthèse dite "procédé sulfurique" est obtenue par absorption de l'éthène dans l'acide sulfurique suivie de l'hydrolyse des sulfates obtenus. Une alternative consiste à effectuer une hydratation directe de l'éthène. La première unité fut réalisée par la société Shell en 1948 aux Etats-Unis. BP Chemicals fit de même en Ecosse à partir de 1951.
On s'intéresse ici à la thermodynamique de cette alternative, appliquée avec succès par Louis. L'équation-bilan de la réaction est :

$$C_2H_4\,(g) + H_2O\,(g) = C_2H_5OH\,(g)$$

La réaction s'effectue à 600 K sous une pression de 70 bars.
Les données thermodynamiques sont les enthalpies standard de formation $\Delta_f H^\circ$ à 298 K et les entropies molaires standard S_m° à 298 K :

	C_2H_4 (g)	H_2O (g)	C_2H_5OH (g)
$\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol^{-1})	52	-240	-235
S_m° (J.K^{-1}.mol^{-1})	220	190	280

1. Calculer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$ et l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ à 298 K. Commenter les signes de ces deux grandeurs.
2. A quoi correspond l'approximation d'Ellingham ? On supposera qu'on se place dans ce cadre pour la suite.
3. Exprimer la constante d'équilibre K° de cette réaction à 600 K.
4. On introduit l'éthène et l'eau dans les proportions stœchiométriques. Déterminer l'équation dont la résolution donne la composition du système à l'équilibre.
5. Comment évolue le système si on diminue la température à pression constante lorsque le système est fermé ?
6. Même question si on diminue la pression à température constante.
7. Conclure sur le choix des conditions de pression et de température retenues.

II - Solubilité du carbonate de calcium

Depuis qu'il a vu un documentaire sur les dangers de l'acidification de l'océan sur les coraux, Louis ne pense plus qu'à ça. Plutôt que de rece voir des cadeaux d'anniversaire, il propose donc une collecte de fonds pour l'association Coral Guardian.
Pour que tout le monde comprenne bien l'urgence de la situation, étudions la solubilité du carbonate de calcium $CaCO_3$ qui est le constituant principal des coquilles d'animaux marins, du corail et des escargots.

A - Effet du pH sur la solubilité du carbonate de calcium

L'acidifiation des océans est dues à une plus grande concentration de CO_2 dissous dans l'eau. Le CO_2 dissous dans l'eau se note H_2CO_3(aq).
Les couples considérés sont donc :

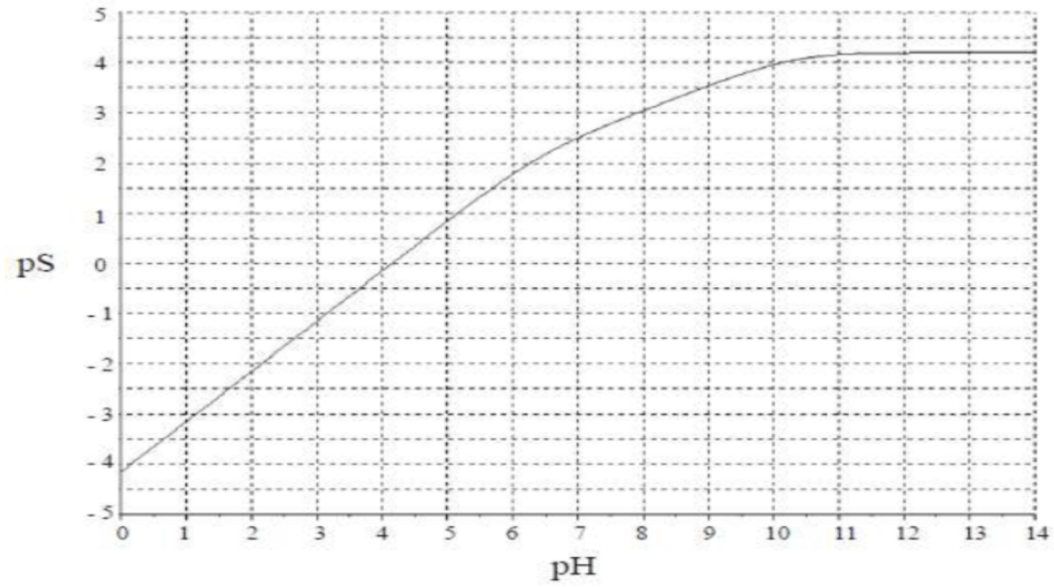
- ▷ H_2CO_3/ HCO_3^- (équivalent à CO_2(aq)/HCO_3^-) de constante d'acidité $K_{a1} = 10^{-6,4}$.
- ▷ HCO_3^- / CO_3^{2-} de constante d'acidité $K_{a2} = 10^{-10,3}$.

8. Etablir le diagramme de prédominance des couples étudiés.

9. Ecrire l'équation de la réaction de dissolution du carbonate de calcium dans l'eau. En négligeant les propriétés basiques des ions carbonate, exprimer la solubilité s du carbonate de calcium de deux façons différentes. En déduire sa valeur à 298 K. On donne la constante de solubilité du carbonate de calcium à 298 K : $K_S = 10^{-8,4}$

On donne $10^{0,2} \simeq 0,63$

On tient maintenant compte des propriétés basiques des ions carbonates.
Le graphe représentant ps en fonction du pH pour la solubilité du carbonate de calcium est représenté ci-dessous :



On cherche à retrouver l'équation de la courbe ps $= -\log(s)$ en fonction du pH dans les différents domaines de prédominances de CO_3^{2-}, HCO_3^- et CO_2(aq).

10. Retrouver la valeur du produit de solubilité de $CaCO_3$ à l'aide du graphe.

11. Écrire l'équation de la dissolution de $CaCO_3$ lorsque HCO_3^- est majoritaire. Établir la relation entre ps, pK_{a2} et pH dans le domaine de majorité des ions hydrogénocarbonates HCO_3^-.

12. Écrire l'équation de la dissolution de $CaCO_3$ lorsque CO_2(aq) est majoritaire. Établir la relation entre ps, pK_{a1}, pK_{a2} et pH dans le domaine de majorité du dioxyde de carbone.

13. Montrer que pour toute valeur de pH, la solubilité de $CaCO_3$ s'écrit

$$s = \sqrt{K_s + \frac{K_s.h}{K_{a2}} + \frac{K_s.h^2}{K_{a1}.K_{a2}}}$$

avec $h = [H_3O^+]$.

14. Déduire qualitativement du graphe précédent l'effet d'une augmentation de la concentration en dioxyde de carbone sur les organismes calcaires de l'océan.

B - Cinétique de la dissolution du carbonate de calcium dans une solution acide

On s'intéresse maintenant à la vitesse de réaction de dissolution du carbonate de calcium selon deux méthodes.
Pour cela, on étudie l'évolution de la réaction entre le carbonate de calcium $CaCO_3$ (s) et un volume $V_0 = 100$ mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 0,10$ mol/L. L'équation de la réaction s'écrit

$$CaCO_3\,(s) + 2\,H^+\,(aq) = CO_2\,(g) + H_2O\,(l) + Ca^{2+}\,(aq)$$

On considèrera que la totale du dioxyde de carbone formé se dégage.

15. Quel est le pH de la solution d'acide chlorhydrique ?

Première méthode
Dans une première expérience, on mesure la pression du dioxyde de carbine apparu en utilisant un capteur de pression différentiel. Le gaz occupe un volume $V = 0,1$ L à la température de 25°C. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

t (s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0
p_{CO2} (Pa)	1250	2280	3320	4120	4880	5560	6090	6540	6940	7170

16. Etablir la relation donnant la quantité de matière en dioxyde de carbone n_{CO2} à chaque instant t en fonction de p_{CO2}.

17. Etablir la reation entre l'avancement x et n_{CO2}. Effectuer l'application numérique à $t = 100$ s afin de compléter le tableau de valeurs suivant.
On prendra $\dfrac{1}{RT} \simeq 4.10^{-4}$ mol/J.

t (s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0
x (mmol)	0,50	0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	

Deuxième méthode
Dans une deuxième expérience, on mesure le pH de la solution afin de déterminer $[H^+]$ en fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

t (s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0
n_{H+} (mmol)	9,00	8,20	7,30	6,70	6,10	5,50	5,10	4,70	4,40	4,20

18. Quelle relation existe-t-il entre n_{H+} et $[H^+]$ à tout instant ? Etablir la relation entre n_{H+} et l'avancement x. Effectuer l'application numérique à $t = 10,0$s afin de compléter le tableau de valeurs suivant :

t (s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100,0
x (mmol)		0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	2,90

19. Les deux méthodes sont-elles cohérentes ?

Une fois les résultats expérimentaux obtenus, on désire déterminer l'ordre de la réaction par rapport à H^+. On utilisera comme expression de la vitesse :

$$v = k[H^+]^\alpha$$

où α est l'ordre de la réaction.

20. Définir la vitesse de la réaction par rapport à $[H^+]$.

21. Etblir la relation entre $[H^+]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 0 par rapport à H^+. Etablir alors la relation suivante

$$x = kV_0t$$

22. Etablir la relation entre $[H^+]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 1 par rapport à H^+. Etablir alors la relation suivante

$$\ln\left(\frac{c_aV_0 - 2x}{c_aV_0}\right) = -2kt$$

23. Etablir la relation entre $[H^+]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 2 par rapport à H^+. Etablir alors la relation suivante

$$\frac{1}{c_aV_0 - 2x} - \frac{1}{caV_0} = \frac{2kt}{V_0}$$

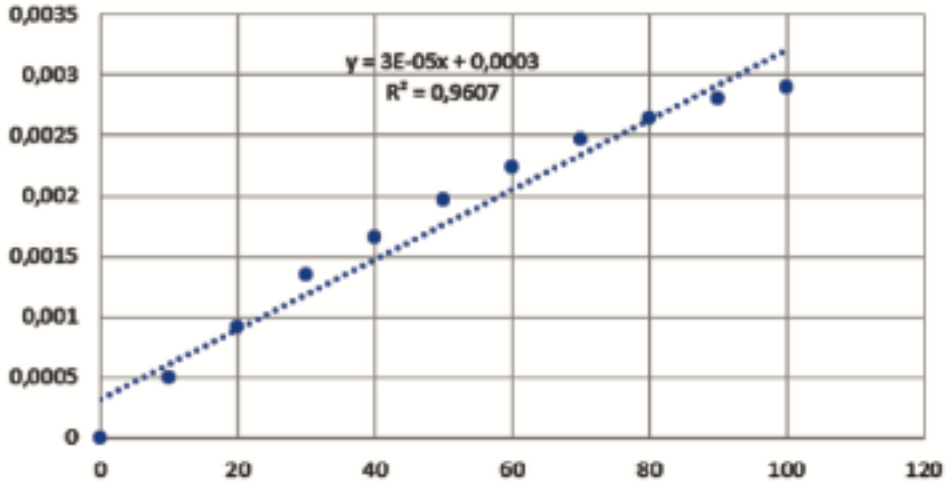
On obtient les graphes donnés à la page suivante.

24. A l'aide des graphes, déterminer l'ordre de la réaction et la constante de vitesse dont on précisera l'unité.

25. Que pensez-vous quant à la vitesse de dissolution des coraux dans l'océan ?

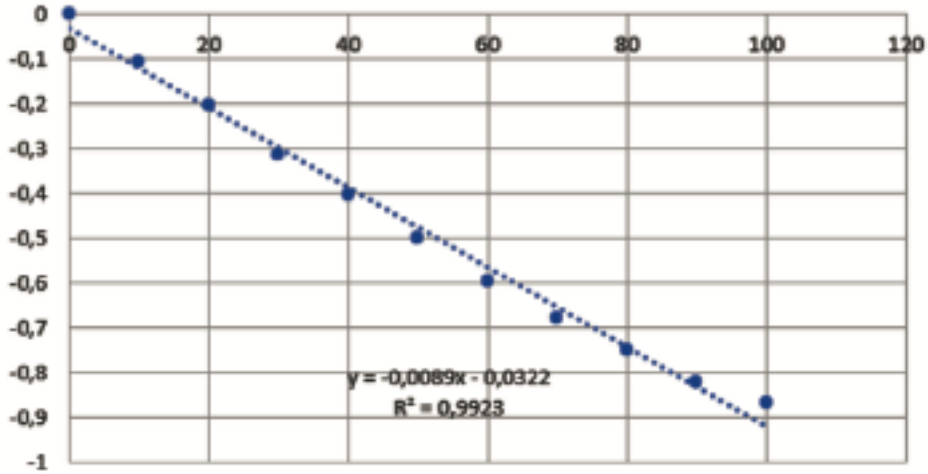
Graphe1 : $x = f(t)$

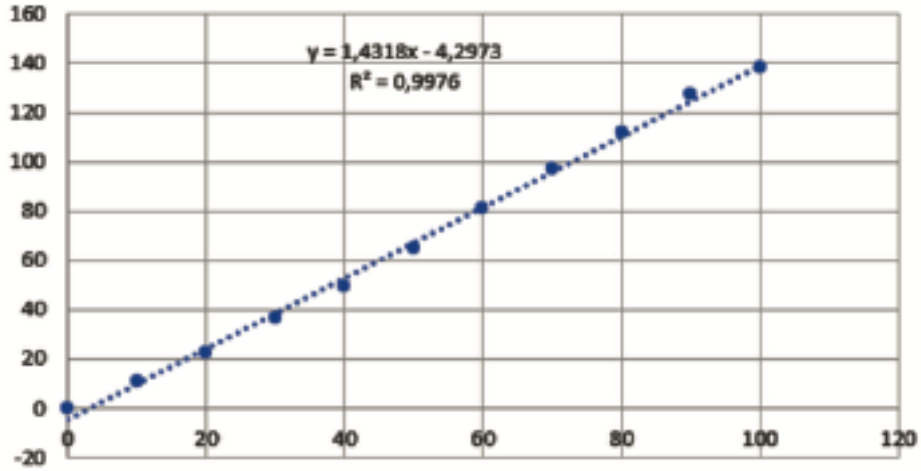
x(mol)



Graphe 2 : $\ln(1 - 200x) = f(t)$

ln(1-200x)



Graphe 3 : $\frac{1}{0{,}01-2x} - 100 = f(t)$

1/(0,01-2x)-100