**DS5** - 08/02/25

# Mécanique et thermo

### Conseils pour aborder le devoir

- La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- Pensez à vérifier l'homogénéité de vos relations

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES Durée de l'épreuve : 4h00

# I - Rénovation énergétique

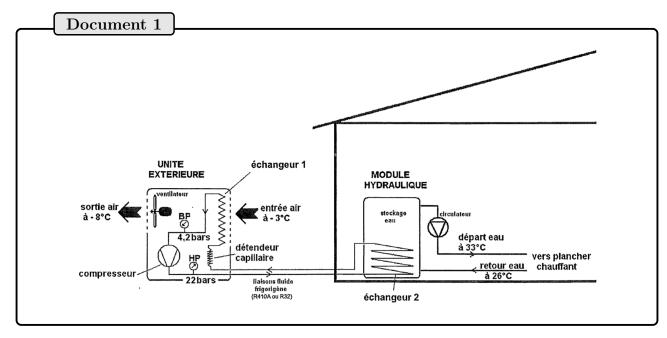
Dans le cadre de la rénovation énergétique des bâtiments afin de lutter contre le réchauffement climatique, il est préconisé l'installation de pompe à chaleur. En effet, ce dispositif permet d'effectuer des économies d'énergie pour le chauffage des habitations et la production d'eau sanitaire.

#### A - Modèle ditherme

- 1. Présenter sous forme de schéma annoté, le principe de fonctionnement d'une pompe à chaleur ditherme fonctionnant entre une source chaude thermostatée (de température  $T_C$ ) et une source froide thermostatée (de température  $T_F$ ).
- 2. On considère comme système thermodynamique le fluide de la pompe à chaleur. Préciser, en justifiant, les signes de  $Q_C$  transfert thermique reçu par le système de la part de la source chaude, de  $Q_F$  transfert thermique reçu par le système de la part de la source froide et de W travail mécanique reçu de la part du système mécanique sur un cycle de fonctionnement.
- 3. Définir l'efficacité (ou COP) de cette pompe à chaleur. L'exprimer en fonction uniquement des transferts thermiques  $Q_C$  et  $Q_F$ .
- 4. Déterminer l'expression de l'efficacité (ou COP) de la pompe à chaleur en fonction de  $T_C$  et  $T_F$  respectivement température de la source chaude et température de la source froide, de l'entropie créée au cours d'un cycle de fonctionnement que l'on notera  $S_c$  et de W. Donner son ordre de grandeur pour une machine réelle.
- **5.** Représenter graphiquement l'évolution du COP en fonction de  $S_c$  (en considérant W,  $T_C$  et  $T_F$  constants).
- **6.** Interpréter physiquement le cas  $S_c = 0$ .

# B - Fonctionnement de la pompe à chaleur à fluide R410A

Le schéma de principe d'une telle installation est présenté dans le document 1.



7. A l'aide du document 1, identifier la source chaude et la source froide ainsi que le système mécanique qui échange un travail avec le fluide de la pompe à chaleur.

On étudie dans cette partie le fonctionnement réel de la pompe à chaleur fonctionnant avec le fluide R410A. Cette pompe à chaleur est composée des organes thermodynamiques suivants : un compresseur, un condenseur (dans lequel a lieu une liquéfaction), un détendeur et un évaporateur. Le fluide R410A subit alors les transformations décrites dans le document 2.

#### Document 2

En régime permanent d'écoulement, le fluide R410A subit les transformations suivantes :

- ho 1 
  ightharpoonup 2: le fluide à l'état gazeux sous la pression  $P_b = 4,2$  bars et à la température de  $-12^{\circ}$ C subit une compression isentropique jusqu'à la pression  $P_h = 22$  bars dans un compresseur;
- $\triangleright$  2  $\rightarrow$  3 : le gaz entre dans le condenseur où il subit dans un premier temps un refroidissement isobare selon une désurchauffe, pour atteindre un état de vapeur juste saturante;
- ightharpoonup 3 o 4: toujours dans le condenseur, le fluide subit une liquéfaction jusqu'au liquide juste saturé à la pression  $P_h$ ;
- $\triangleright$  4  $\rightarrow$  5 : le liquide subit alors un sous-refroidissement isobare jusqu'à la température de 30°C et sort du condenseur ;
- $\triangleright$  5  $\rightarrow$  6 : le liquide entre dans le détendeur (adiabatique et sans partie mobile) pour y subir une détente jusqu'à la pression  $P_b$ ;
- $\triangleright$  6  $\rightarrow$  7 : le fluide entre dans l'évaporateur pour y subir une vaporisation totale à la pression  $P_b$  pour se retrouver sous forme de vapeur juste saturante;
- $\triangleright$  7  $\rightarrow$  1 : avant de sortir de l'évaporateur, la vapeur juste saturante subit une surchauffe avant de rentrer dans le compresseur.

Pour un fluide en écoulement permanent à travers un organe thermodynamique à une entrée et une sortie, on rappelle le premier principe industriel :

$$\Delta_{(e,s)}(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

avec h enthalpie massique du fluide,  $e_c$  énergie cinétique massique du fluide,  $e_p$  énergie potentielle massique du fluide,  $w_i$  travail massique reçu par le fluide et q transfert thermique massique reçu par le fluide.

Dans la suite, on négligera les variations d'énergies cinétique et potentielle massiques devant la variation d'enthalpie massique. On négligera les pertes de charge dans les canalisations.

Sur le document 1 figurent les deux échangeurs (échangeur 1 et échangeur 2) de la pompe à chaleur : l'un est le condenseur, l'autre est l'évaporateur.

- 8. Au contact de quelle source doit être mis le condenseur? Identifier l'échangeur, présent sur le document 1, concerné en justifiant la réponse.
- 9. Au contact de quelle source doit être mis l'évaporateur? Identifier l'échangeur, présent sur le document 1, concerné en justifiant la réponse.
- 10. En appliquant le premier principe à l'écoulement permanent à travers le détendeur, en déduire la nature de la transformation subie par le fluide.

11. La transformation subie par le fluide dans le compresseur est considérée isentropique dans un premier temps. Comment peut-on justifier cette hypothèse?

On fournit le diagramme enthalpique en annexe (à rendre avec la copie) du fluide R410A.

- 12. A l'aide du document 2, représenter les différents points du cycle effectué par le fluide R410A notés de 1 à 7 sur le diagramme fourni en annexe. On précisera le sens d'évolution le long de ce cycle.
- 13. Sans s'aider des isotitres figurant sur le diagramme fourni, déterminer le titre massique du seul point du cycle dans un état diphasique. Commenter.
- 14. Déterminer à l'aide du diagramme :
  - le travail massique indiqué reçu par le fluide de la part du compresseur;
  - le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée du condenseur;
  - le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée de l'évaporateur.
- 15. Quel est l'intérêt de la surchauffe?
- 16. Calculer l'efficacité de la pompe à chaleur fonctionnant avec le fluide R410A (on donnera le résultat avec deux chiffres significatifs). Quel est l'intérêt d'une pompe à chaleur par rapport à un chauffage électrique?
- 17. En réalité, la transformation subie par le fluide à la traversée du compresseur n'est pas isentropique. L'efficacité réelle vaut 90% de l'efficacité calculée à la question précédente et le reste du cycle est inchangé. Quelle est alors la température en sortie du compresseur?

# C - Remplacement du fluide R410A par le fluide R32

#### Document 3

Dans la majorité des modèles de pompes à chaleur air/eau, la production de chaleur était réalisée avec un fluide surnommé R410A, un gaz fluoré qui est progressivement retiré du marché, depuis 2016, au bénéfice d'un autre, considéré comme plus compatible avec la question environnementale : le R32.

La réglementation européenne CE 517/2014, ou réglementation F-Gaz, a été mise en place dans l'ensemble de l'Union afin de cadrer l'usage des fluides fluorés. Entrée en vigueur au 1er janvier 2015, elle a pour objectif final de réduire les émissions de gaz à effet de serre à hauteur de 80%, d'ici 2050. Répondant aux exigences européennes sur la réduction des émissions de gaz à effet de serre, le gaz R32 est un atout pour les nouvelles pompes à chaleur arrivant sur le marché. Voici ses différents avantages :

- Un impact 75% moins élevé sur l'environnement par rapport aux autres fluides frigorigènes tels que le R410A grâce à un PRG (Pouvoir de Réchauffement Global) à 675 kg éq CO2.
- Le R32 permet d'obtenir un gain de performance thermique de 6 à 7% par rapport aux équipements alimentés en R410A.
- Sa performance augmentée permet de réaliser des économies sur votre facture énergétique et de rendre votre habitat moins énergivore.
- La composition du fluide le rend plus manipulable, avec la possibilité de le charger dans votre système de chauffage à l'état liquide comme gazeux, contrairement au R410A.

- A composant unique et donc totalement pur, il est plus facilement recyclable et a un impact nul sur la couche d'ozone.

Source: www.izi-by-edf-renov.fr

On fait l'hypothèse que le cycle subi par le fluide R32 est approximativement le même que celui du fluide R410A. Le tableau suivant donne les valeurs massiques pour les points 1 à 7 :

Points	1	2	3	4	5	6	7
h en kJ.kg <sup>-1</sup>	518	588	512	268	254	254	510

18. Vérifier le gain de performance annoncé dans le document 3.

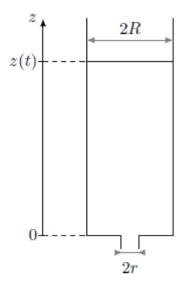
# D - Chauffage de la maison par plancher chauffant

La pompe à chaleur précédemment étudiée sert à chauffer de l'eau (contenue dans le ballon de stockage présent dans le schéma du document 1). Cette eau, via un circulateur (une pompe), est envoyée dans un tuyau serpentant dans le plancher de la maison.

19. Rappeler la relation de Bernoulli dans le cadre d'un écoulement parfait stationnaire, homogène et incompressible d'un fluide soumis à la seule force de pesanteur. On travaillera par la suite dans ce cadre.

Un technicien doit intervenir sur le ballon de stockage d'eau. Pour cela, il doit le vidanger complètement. On considère ce ballon comme un cylindre de rayon R et de hauteur H. Il est complètement rempli sur une hauteur  $H_0$  ( $H_0 < H$ ). Un trou en son sommet permet le contact à l'atmosphère. Un tuyau de vidange est placé en son centre sur sa partie basse de rayon r permettant de vidanger à l'atmosphère l'eau du ballon. On négligera le volume occupé par les tuyaux de la pompe à chaleur. Le technicien ouvre le robinet de vidange à t = 0. On cherche à estimer le temps que prendra la vidange totale du ballon.

On a représenté le ballon à un instant t quelconque de la vidange. La surface libre est alors repérée par la coordonnée z(t). A l'instant t = 0 de la vidange,  $z(0) = H_0$ .



**20.** Montrer que l'on peut mettre la vitesse  $v_0$  de l'eau au niveau du robinet de vidange sous la forme :

$$v_0 = -\frac{R^2}{r^2} \frac{dz}{dt}$$

- **21.** En appliquant la relation de Bernoulli, déterminer la vitesse  $v_0$  en fonction de la hauteur de liquide notée z(t), de l'accélération de la pesanteur notée g et de la vitesse de la surface libre à l'altitude z notée  $v_z$ .
- **22.** Le ballon est tel que R=0,50 m et r=5,0 mm. Quelle simplification de la relation précédente peut-on en tirer?
- **23.** En déduire, dans le cas de cette simplification, l'expression de la fonction z(t) que l'on exprimera en fonction de g, r, R,  $H_0$  et t.
- 24. Déterminer alors l'expression littérale du temps nécessaire à la vidange complète du ballon.
- **25.** Effectuer l'application numérique. On prendra  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $H_0 = 2, 0 \text{ m}$ .

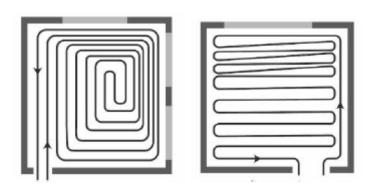
Le plancher chauffant est alimenté par l'eau du ballon. On désire connaître la puissance de la pompe (ou circulateur) pour assurer le bon fonctionnement de l'installation.

- **26.** A l'aide du document 4, estimer la puissance du circulateur à utiliser pour compenser les pertes de charge linéiques.
- **27.** On préconise pour cette installation une puissance de 15 W. Comment expliquer la différence avec le résultat de la question précédente?
- 28. Quel type de pose préconiseriez-vous pour un confort d'utilisation du plancher chauffant optimal. Justifier.

# Document 4

Caractéristiques du plancher chauffant :

- tuyaux en polyéthylène réticulé;
- contraintes mécaniques maximales : pression : 6,0 bar à 50°C, 10,0 bar à 5°C;
- température maximale supportée : 110°C;
- masse volumique de l'eau : 1000 kg.m<sup>-3</sup>;
- débit volumique de l'eau : 6,0 L.min<sup>-1</sup>;
- longueur totale pour le plancher chauffant de la maison : 120 mètres linéaires ;
- pertes de charge linéiques : 35 mm/m;
- types de pose (en escargot à gauche et en serpentin à droite) :



# II - Autour du lac

Nous sommes en été et un enfant dévale un toboggan aquatique, tandis qu'un adulte traverse le lac en pédalo.

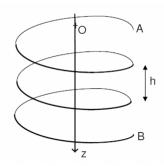




Cette partie s'intéresse à l'étude du mouvement de chacun de ces deux vacanciers.

# A - Etude de la descente en toboggan

Le toboggan est représenté sur la figure suivante :



Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

- L'enfant de masse m = 50 kg est assimilé à un point matériel M.
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon R = 5 m. On néglige tout frottement.
- A chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h.

Le point M, initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant. L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

On donne l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

On note  $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$  la base locale orthonormée directe associée au système des coordonnées cylindriques.

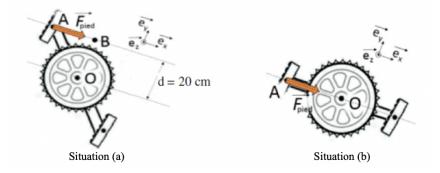
- **29.** Les équations de la trajectoire sont données par les relations :  $r(\theta) = R$  et  $z(\theta) = \gamma \theta$ . où  $\gamma$  est une constante positive. Exprimer h en fonction de  $\gamma$ .
- **30.** Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse du point M en fonction de R,  $\theta$  et z et de leurs dérivées temporelles  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{z}$ .
- **31.** Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 Bz$ , où A et B sont des constantes à expliciter en fonction des données.

- **32.** Déterminer la vitesse  $v_s$  de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de g et h.
- **33.** Déterminer l'équation différentielle satisfaite par z(t) et en déduire la durée T de la descente en fonction de A, B et h.
- **34.** Si on prend en compte une force de frottement de norme constante F, exprimer l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de F, R et  $\gamma$ .

### B - Etude de la traversée en pédalo

Le pédalo avec son passager possède une masse totale M=200 kg et il dispose de deux flotteurs, chacun de volume V=0,5 m<sup>3</sup>. L'ensemble se déplace à vitesse constante sur le lac.

- 35. Calculer la fraction de volume immergé des flotteurs lorsque l'équilibre vertical est réalisé.
- **36.** La force de norme  $F_{pied} = 50$  N exercée par le vacancier sur le pédalier est modélisée sur la figure suivante :



Dans chacune des situations (a) et (b), exprimer le moment de la force exercée par le vacancier par rapport à l'axe de rotation du pédalier.

37. On considère que le moment du couple moyen exercé sur le pédalier correspond à la moyenne des 2 valeurs précédentes. Sachant que le pédalier tourne à la vitesse constante  $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ , évaluer la puissance moyenne développée par le vacancier.

#### C - Gel du lac

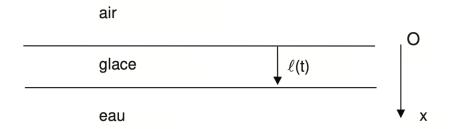
Nous sommes en hiver et la température extérieure est de -10 °C. Le lac gèle.

On se propose de modéliser la croissance de la couche de glace à la surface du lac, en régime quasi-stationnaire. On note H=30 m la profondeur du lac, et S=10 km<sup>2</sup> sa surface.

On suppose que l'eau est en permanence à la température de fusion  $T_e = 273 \text{ K}$ .

L'air au-dessus du lac est à la température constante et uniforme  $T_a = 263$  K et à la pression atmosphérique  $P_0 = 1$  bar.

Libre de glace à l'instant t=0, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est  $\ell(t)$ ; comme le montre la figure suivante, la position d'un point du lac est repérée par son abscisse x, l'axe Ox étant vertical descendant et l'origine O étant au niveau de la surface du lac.



Les caractéristiques de la glace sont les suivantes :

- masse volumique  $\mu = 990$  kg.m<sup>-3</sup>.
- conductivité thermique  $\lambda = 2, 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}.$
- enthalpie massique de fusion (à  $T_e = 273$  K)  $\Delta h_f = 335$  kJ.kg<sup>-1</sup>.
- capacité thermique massique  $c_g = 2, 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$

On fait les deux hypothèses suivantes relatives aux transferts thermiques convectifs :

- Le transfert thermique par convection à l'interface glace-air, pour une surface S de glace, pendant la durée dt, est donné par la relation  $\delta Q_c = h(T_0(t) T_a).S.dt$ , où  $T_0(t) = T(x = 0, t)$  est la température de la glace en x = 0. La température  $T_0$  est comprise entre  $T_a$  et  $T_a < T_0 < T_e$  de sorte que ce transfert s'effectue de la glace vers l'air. On donne  $h = 42 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}.$
- Le transfert thermique par convection à l'interface eau-glace est négligé, de sorte que la température à cette interface est constamment à la température de l'eau :  $T(x = \ell, t) = T_e$ .

On rappelle l'équation de diffusion thermique dans la glace :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c_g \frac{\partial T}{\partial t}$$

- **38.** Calculer le rapport  $\ell_0 = \frac{\lambda}{h}$  en précisant son unité.
- **39.** Le gel de l'eau induit un transfert thermique de l'eau vers l'air. Que vaut ce transfert thermique q lors du gel de 1 kg de glace?
- **40.** Que vaudrait le transfert thermique Q cédé par la glace lors du gel de la totalité du lac? On donnera le résultat sous forme d'une puissance de 10.
- **41.** Dans l'hypothèse où  $T_0(t)$  varie lentement (régime quasi-stationnaire), justifier que la température T(x) dans la glace (pour x variant de 0 à  $\ell$ ) peut s'écrire sous la forme :

$$T(x) = ax + b$$

où les constantes a et b sont à exprimer en fonction de  $T_0$ ,  $T_e$  et de  $\ell$ .

- **42.** Entre les instants t et t + dt,  $\ell(t)$  varie de dl. Exprimer, pour cet intervalle de temps dt, le transfert thermique  $\delta Q_1$  cédé par l'eau lors de sa solidification, en fonction notamment de q.
- 43. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique conductif  $\delta Q_2$  dans la couche de glace du bas vers le haut, en fonction notamment de la différence  $(T_e \, \tilde{} \, T_0(t))$ .
- **44.** La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose :  $\delta Q_c = \delta Q_2$ . En déduire l'expression de  $T_0(t)$  en fonction de  $T_e$ ,  $T_a$ ,  $\ell_0$  et de  $\ell(t)$ .

**45.** La continuité du flux thermique à l'interface eau-glace impose :  $\delta Q_2 = \delta Q_1$ . En déduire que  $\ell(t)$  vérifie l'équation différentielle de la forme suivante

$$\frac{d\ell}{dt} + \frac{\ell}{\ell_0} \frac{d\ell}{dt} = v_0$$

où  $v_0$  est une constante homogène à une vitesse, que l'on exprimera en fonction de h,  $\mu$ , q,  $T_e$  et  $T_a$ .

- 46. Intégrer l'équation précédente et montrer que  $\ell(t)$  vérifie une équation du second degré.
- 47. En déduire l'expression de  $\ell(t)$  tant que le lac n'est pas gelé dans sa totalité.
- **48.** En fonction de  $\ell_0$  et  $v_0$ , exprimer un temps caractéristique  $\tau$  de l'évolution de  $\ell(t)$ , et en donner un ordre de grandeur sachant que  $v_0$  est de l'ordre de  $10^{-6}$  m.s<sup>-1</sup>.
- **49.** En fonction de  $\ell_0$ ,  $\lambda$ ,  $c_g$  et  $\mu$ , exprimer un temps caractéristique  $\tau'$  de la diffusion dans la glace sur la longueur  $\ell_0$ , et en donner un ordre de grandeur. Conclure sur l'hypothèse du régime quasi-stationnaire faite à la question **41.**

